§5.3 向量组的秩

定义 5.3.2. 在 $V(F)$ 中，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示，那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ **线性表示**.

注意，定义中的两个向量组所含向量的个数一般不相同．显然，每一个部分组都可由原向量组线性表示． 根据上一节引进的形式记号，下列命题成立．

命题 5.3.2. *在 $V(F)$ 中，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示当且仅当存在 $A \in M_{ts}(F)$，使得 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)A$.*

根据定义，向量组的线性表示是两个向量组之间的一种关系．显然这种关系具有*反身性*．下一个命题表明，这种关系具有*传递性*．

命题 5.3.3. *在 $V(F)$ 中，如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示，并且向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$ 线性表示，那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$ 线性表示.*

证明. 根据已知条件和命题 5.3.2, 存在 $A \in M_{ts}(F)$ 与 $B \in M_{ut}(F)$, 使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)A,$$

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u)B.$$

于是
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u)BA.$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_u$ 线性表示. □

下面介绍线性空间 $V(F)$ 中的向量组与向量组之间的另一种关系.

定义 5.3.3. 在 $V(F)$ 中，如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以互相线性表示，那么称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **等价于** $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，或称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是**等价的**，记作

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}.$$

显然，向量组的等价关系具有反身性和对称性．根据命题 5.3.3, 这种关系具有传递性．下面给出等价关系的一个重要性质．

定理 5.3.4 (替换定理). 在线性空间 $V(F)$ 中，设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示．如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，那么

(1) 这两个向量组所含向量的个数 s 与 t 满足关系式 $s \leqslant t$;

(2) 当有必要时，适当改变向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的下标编号，可使向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t$ 等价于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

证明. (1) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示．根据命题 5.3.2, 存在数域 F 上的一个 $t \times s$ 矩阵，使得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\, A. \tag{5.3.1}$$

令 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_s)'$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\, AX. \tag{5.3.2}$$

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，那么向量方程 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = \theta$ 只有零解．于是由 (5.3.2) 式可见，齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 不可能有非零解，所以系数矩阵 A 是列满秩的，因此它的列数 s 不可能超过行数 t, 即 $s \leqslant t$.

(2) 根据 (1) 的证明，矩阵 A 是列满秩的，因而它至少有一个 s 阶子式不等于零．于是当 $s = t$ 时，有 $|A| \neq 0$, 所以 A 是可逆的，从而由 (5.3.1) 式，有

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)A^{-1}.$$

根据命题 5.3.2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

当 $s < t$ 时，不妨设由 A 的前 s 行组成的 s 阶子式不为零 (否则，适当交换 A 的某些行，可使由前 s 行组成的子式不为零．此时，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的位置也要作相应的调整，即适当改变它们的下标编号，才能保证 (5.3.1) 式仍然成立). 令 B 是由 A 的前 s 行组成的 s 阶小方阵，则 $|B| \neq 0$, 所以 B 是可逆的．再令 C 是由 A 的后 $t-s$ 行组成的小矩阵，则 $A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, 所以 $A = \begin{pmatrix} I_s \\ CB^{-1} \end{pmatrix} B$. 于

是 (5.3.1) 式变成 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\begin{pmatrix} I_s \\ CB^{-1} \end{pmatrix}B$. 设

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\begin{pmatrix} I_s \\ CB^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.3.3}$$

则
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s)B,$$

所以
$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t)\begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

从而 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t)\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{t-s} \end{pmatrix}$.

类似地，由 (5.3.3) 式，有

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)\begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0} \\ CB^{-1} & I_{t-s} \end{pmatrix}.$$

现在，把最后一个等式右边代入倒数第二个等式，得

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)Q,$$

其中 $Q = \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0} \\ CB^{-1} & I_{t-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{t-s} \end{pmatrix}$. 显然 Q 是可逆的，那么由上式，有

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t)Q^{-1}.$$

根据命题 5.3.2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t$ 等价于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$. $\square$